

Други колоквијум из Математике 2 - решења

1. За $x = 2 \sin t$, $y = 2(\ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \cos t)$ је:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2 \cos t, \\y'(t) &= 2 \left(\frac{1}{\frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} + \sin t \right) = 2 \left(-\frac{1}{\sin t} + \sin t \right),\end{aligned}$$

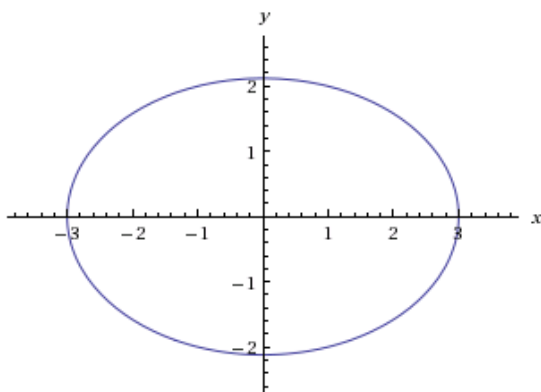
па је тражена дужина лука:

$$\begin{aligned}L &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\left((2 \cos t)^2 + 2 \left(-\frac{1}{\sin t} + \sin t \right)^2 \right)} dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t + \frac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t} dt \\&= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 t} dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} |\operatorname{ctg} t| dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} -\operatorname{ctg} t dt.\end{aligned}$$

Уводећи смену $\sin t = u$, $\cos t dt = du$, $t = \frac{\pi}{2}$ за $u = 1$ и $t = \frac{5\pi}{6}$ за $u = \frac{1}{2}$ добијамо:

$$L = -2 \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{u} = 2(\ln |u|)|_{\frac{1}{2}}^1 = 2 \left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2} \right) = 2(-\ln 2^{-1}) = 2 \ln 2.$$

2. Једначина елипсе $x^2 + 2y^2 = 9$ у канонском облику је $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2} = 1$ (слика).



Обртна површ (елипсоид) настаје ротацијом горње полуелипсе чија је једначина

$y = \sqrt{\frac{9-x^2}{2}}$ око x -осе, $-3 \leq x \leq 3$. Како је

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2(9-x^2)}} \quad \text{и} \quad 1 + y'^2(x) = \frac{18-x^2}{2(9-x^2)},$$

и крива је симетрична у односу на y -осу, тражена површина је

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^3 \sqrt{\frac{9-x^2}{2}} \sqrt{\frac{18-x^2}{2(9-x^2)}} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{18-x^2}.$$

Уводећи смену $x = \sqrt{18} \sin t$, $dx = \sqrt{18} \cos t dt$, $x = 0$ за $t = 0$ и $x = 3$ за $t = \frac{\pi}{4}$ добијамо

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{18-18\sin^2 t} \sqrt{18} \cos t dt = 2\pi \cdot 18 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = 18\pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 18\pi \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{9\pi^2}{2} + 9\pi. \end{aligned}$$

3. За $p = \frac{z}{x}$ и $q = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$ је:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{2y}{x}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{2z}{x}.$$

Из $u = f(p, q)$, $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$ даље рачунамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{-z}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2y}{x}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2z}{x}, \end{aligned}$$

одакле је:

$$\begin{aligned} &2xy \frac{\partial u}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial y} + 2yz \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= 2xy \left(\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{-z}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2} \right) + (y^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2y}{x} + 2yz \left(\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2z}{x} \right) \\ &= \left(-\frac{2yz}{x} + \frac{2yz}{x} \right) \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{2y}{x} (x^2 - y^2 - z^2) + \frac{2y}{x} (y^2 - x^2 - z^2) + \frac{4yz^2}{x} \right) \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \end{aligned}$$

4. Диференцирањем функције $(y^2 - 3x^2)e^{1-x-y}$ по x и y добијамо:

$$\begin{aligned}z'_x &= e^{1-x-y}(-6x - y^2 + 3x^2), \\z'_y &= e^{1-x-y}(2y - y^2 + 3x^2).\end{aligned}$$

Решавањем система $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ налазимо да функција има две стационарне тачке: $M_1(0, 0)$ и $M_2(-1, 3)$. Треба проверити да ли је у тим тачкама локални екстремум, па налазимо друге парцијалне изводе:

$$\begin{aligned}z''_{xx} &= e^{1-x-y}(-6 + 12x - 3x^2 + y^2), \\z''_{xy} &= e^{1-x-y}(6x - 2y - 3x^2 + y^2), \\z''_{yy} &= e^{1-x-y}(2 - 4y - 3x^2 + y^2).\end{aligned}$$

У тачки M_1 је $A = z''_{xx} = -6e$, $B = z''_{xy} = 0$ и $C = z''_{yy} = 2e$, па је $\Delta = AC - B^2 = -12e^2 < 0$ и ту функција нема екстремум.

У тачки M_2 је $A = -\frac{12}{e}$, $B = -\frac{6}{e}$ и $C = -\frac{4}{e}$, па је $\Delta = \frac{12}{e^2} > 0$ и како је $A < 0$, M_2 је тачка локалног максимума, $z(M_2) = \frac{6}{e}$.

5. Напишимо дату једначину у облику $y' = \frac{-x + 3y + 2}{x + y + 2}$. Сменама $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ за одговарајуће α и β , ова једначина се своди на хомогену. У једначини

$$Y' = \frac{-X - \alpha + 3Y + 3\beta + 2}{X + \alpha + Y + \beta + 2}$$

бирамо α и β тако да важи

$$-\alpha + 3\beta + 2 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \beta + 2 = 0.$$

Решење горњег система је $\alpha = -1$ и $\beta = -1$, па полазна једначина постаје

$Y' = \frac{-X + 3Y}{X + Y}$, тј. $Y' = -\frac{1 + 3\frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$. Сменом $z = \frac{Y}{X}$, одакле је $Y' = z'X + z$, добијамо

$$z'X + z = \frac{-1 + 3z}{1 + z}, \quad \text{односно} \quad -\frac{1 + z}{(z - 1)^2} dz = \frac{dX}{X}, \quad \text{одакле је}$$

$$-\int \frac{z - 1 + 2}{(z - 1)^2} dz = \int \frac{dX}{X}, \quad \text{односно} \quad -\ln|z - 1| + \frac{2}{z - 1} + C = \ln|X|.$$

Дакле, опште решење хомогене једначине је

$$\frac{2}{\frac{Y}{X} - 1} + C = \ln \left| X \left(\frac{Y}{X} - 1 \right) \right|, \quad \text{тј.} \quad C_1 e^{\frac{2X}{Y-X}} = Y - X,$$

а опште решење полазне једначине је

$$C_1 e^{\frac{2x+2}{y-x}} = y - x.$$